AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

Corrigé de la $1^{\text{ère}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le sujet est constitué d'un problème d'analyse et d'un problème d'algèbre linéaire indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé pourra être admis dans les questions suivantes. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

1 Problème d'analyse

Notations : on note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels et $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes. Etant donné un nombre réel positif r, on note $D(r) = \{z \in \mathbb{C}, |z| < r\}$ et $\bar{D}(r) = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq r\}$.

On appelle *série entière* associée à la suite de nombres complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute série de fonction de la forme $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$, où z est une variable complexe. On rappelle le lemme suivant :

Soit $\sum a_n z^n$ une série entiere, et $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée, alors

(i) Pour tout nombre complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

(ii) Pour tout nombre réel r tel que $0 < r < |z_0|$, la série de fonctions $\sum a_n z^n$ est normalement convergente dans $\bar{D}(r)$.

Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est alors défini par

$$R = \sup\{r \geq 0,\ \text{la suite } (|a_n| r^n) \text{ est bornée }\}.$$

On appelle alors *disque de convergence* le disque $D(R)$.

Le but du problème est d'étudier sur quelques exemples le comportement d'une série entière au voisinage du cercle $C(R) = \{z \in \mathbb{C}, |z| = R\}$.

1.1 Préliminaires

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geq 1$ telle que $\sum a_n$ converge. On note f la somme de cette série entière sur le disque $D(1)$. On fixe $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et on pose

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1 \text{ et } \exists\rho > 0, \exists\theta \in [-\theta_0, \theta_0], \quad z = 1 - \rho e^{i\theta}\}.$$

On note de plus $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.

1. En remarquant que $a_n = R_{n-1} - R_n$, montrer que pour tout $z \in D(1)$,

$$f(z) - S = (z-1)\sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n.$$

On a

$$\begin{aligned} f(x) - S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z^n - 1) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(R_{n-1} - R_n)(z^n - 1) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} R_{n-1}(z^n - 1) - \sum_{n=0}^{+\infty} R_n(z^n - 1) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} R_n(z^{n+1} - 1) - \sum_{n=0}^{+\infty} R_n(z^n - 1) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} R_n(z^{n+1} - z^n) = (z-1)\sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n. \end{aligned}$$

2. Soit $z \in \Delta$. On note $z = 1 - \rho e^{i\varphi}$. Montrer que

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} \leq \frac{2}{2\cos(\varphi) - \rho}.$$

On a
$$\frac{|z-1|}{1-|z|} = \frac{|z-1|}{1-|z|^2}(1+|z|) = \frac{\rho}{2\rho\cos\varphi - \rho^2}(1+|z|) \leq \frac{2}{2\cos(\varphi) - \rho}.$$

3. Etant donné un réel $\varepsilon > 0$ fixé, montrer qu'il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $z \in D(1)$

$$|f(z) - S| \leq |z-1| \left(\sum_{n=0}^{N} |R_n|\right) + \varepsilon\frac{|z-1|}{1-|z|}.$$

Comme la série est convergente, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N$, $|R_n| \leq \varepsilon$. D'après la première question, pour $|z| < 1$:

$$|f(z) - S| \leq |z-1| \left|\sum_{n=0}^{N} z^n\right| + \varepsilon|z-1| \left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} |z|^n\right)$$

4. Déduire des questions précédentes que

$$\lim_{z\to 1, z\in\Delta} f(z) = S.$$

Il existe $\alpha > 0$ tel que pour $|z-1| < \alpha$, $|z-1|\left|\sum_{n=0}^{N} z^n\right| < \varepsilon$, et pour $\rho \leq \cos(\theta_0)$, $\frac{|z-1|}{1-|z|} \leq \frac{2}{\cos\theta_0}$. Ainsi, pour $z \in \Delta$ et $|z-1| \leq \inf\{\alpha, \cos\theta_0\}$, $|f(z) - S| \leq \varepsilon(1 + 2/\cos\theta_0)$.

5. **Application :** Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$.

$$\ln(2) = \lim_{z\to 1, z\in\Delta} \ln(1+z) = \lim_{z\to 1, z\in\Delta} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

1.2 Un théorème Taubérien

Le but des questions suivantes est d'établir une réciproque partielle du résultat précédent.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 telle que $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$. On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$. Pour $x \in]-1, 1[$, on note $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, et on suppose qu'il existe $S \in \mathbb{C}$ tel que

$$\lim_{x\to 1, x<1} f(x) = S.$$

6. Vérifier que pour tout $x \in]0, 1[$, on a : $(1 - x^k) \leq k(1 - x)$.
   Pour tout $x \in]0, 1[$

$$(1 - x^k) = (1 - x)(1 + x + x \cdots + x^{k-1}) \leq k(1 - x)$$

7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $x \in]0, 1[$,

$$|S_n - f(x)| \leq (1 - x)\sum_{k=0}^{n} k|a_k| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{k|a_k|}{n} x^k.$$

   Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0; 1[$,

$$S_n - f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(1 - x^k) - \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k$$

   d'où

$$|S_n - f(x)| \leq (1 - x)\sum_{k=0}^{n} k|a_k| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{k|a_k|}{n} x^k$$

8. Justifier que le réel $M = \sup\{k|a_k| : k \in \mathbb{N}\}$ est bien défini. En déduire que pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad \left|S_n - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right)\right| \leq (M + 1)\varepsilon.$$

La suite $(k|a_k|)$ tend vers 0, elle est donc majorée, et une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne sup qu'on note M. Pour $x = 1 - \frac{\varepsilon}{n}$,

$$\begin{aligned}
\left|S_n(x) - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right)\right| &\leq \frac{\varepsilon}{n} Mn + (1-x)a_0 \times 0 + \frac{1}{n}\left(\sup_{k>n} k|a_k|\right) x^{n+1} \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \\
&\leq M\varepsilon + \frac{1}{n}\left(\sup_{k>n} k|a_k|\right) \frac{1}{1-x} \\
&\leq M\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\left(\sup_{k>n} k|a_k|\right)
\end{aligned}$$

Pour N choisi tel que $\sup\limits_{k>n} k|a_k| < \varepsilon^2$, on a le résultat.

9. En déduire que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = S$.

D'après les hypothèses, $f(x)$ tend vers S en 1^-. Il existe $N' > N$ tel que pour $n \geq N'$, $\left|f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) - S\right| \leq \varepsilon$. Ainsi, pour $n \geq N'$, $|S_n - S| \leq (M+2)\varepsilon$.

1.3 Un exemple de comportement sur le cercle $C(1)$

On considère dans cette partie la série entière

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n} z^n$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du nombre x. Le but est de montrer que cette série est convergente en tout point du cercle $C(1)$ mais qu'elle n'est nulle part absolument convergente.

10. Dans cette question, on considère $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes. On pose $\sigma_0 = 0$ et pour $n \geq 1$, $\sigma_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

(a) On suppose que la suite (σ_n) est bornée, que la série $\sum |b_n - b_{n+1}|$ est convergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$. Justifier que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k (b_k - b_{k+1}) + \sigma_n b_n$$

et en déduire que la série $\sum a_n b_n$ est convergente.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k(b_k - b_{k+1}) + \sigma_n b_n &= \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{m=1}^{k} a_m(b_k - b_{k+1}) + \sum_{m=1}^{n} a_m b_n \\ &= \sum_{m=1}^{n-1}\sum_{k=m}^{n-1} a_m(b_k - b_{k+1}) + \sum_{m=1}^{n} a_m b_n \\ &= \sum_{m=1}^{n-1} a_m(b_m - b_n) + \sum_{m=1}^{n} a_m b_n = \sum_{m=1}^{n-1} a_m b_m + a_n b_n.\end{aligned}$$

Soit M un majorant de $|\sigma_n|$. La série $\sum \sigma_n(b_n - b_{n+1})$ converge donc absolument puisque $|\sigma_n(b_n - b_{n+1})| \leq M|b_n - b_{n+1}|$. De plus, $\sigma_n b_n$ tend vers 0, d'où le résultat.

(b) On suppose que la suite $\left(\dfrac{\sigma_n}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, que la série $\sum |b_n - b_{n+1}|\sqrt{n}$ est convergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} b_n = 0$. Montrer que la série $\sum a_n b_n$ est convergente.

Soit M un majorant de $|\sigma_n/\sqrt{n}|$. La série $\sum \sigma_n(b_n - b_{n+1})$ converge donc absolument puisque $|\sigma_n(b_n - b_{n+1})| \leq M\sqrt{n}|b_n - b_{n+1}|$. De plus, $|\sigma_n b_n| \leq M\sqrt{n}|b_n|$ tend vers 0, d'où le résultat.

11. (a) Etablir que pour tout entier naturel impair p, on a

$$\sum_{n=p^2}^{(p+2)^2-1} (-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} = 2.$$

On a

$$\sum_{n=p^2}^{(p+2)^2-1} (-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} = \sum_{n=p^2}^{(p+1)^2-1} (-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} + \sum_{n=(p+1)^2}^{(p+2)^2-1} (-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} = (-1)^p(2p+1) + (-1)^{p+1}(2p+3) = 2.$$

(b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel fixé et N_0 le plus grand entier tel que $(2N_0+1)^2 \leq N$. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{(2N_0+1)^2-1} (-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} = 2N_0.$$

D'après ce qui précède

$$\sum_{n=1}^{(2N_0+1)^2-1} (-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} = \sum_{k=0}^{N_0-1} \sum_{n=(2k+1)^2}^{(2k+3)^2-1} (-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} = 2N_0.$$

(c) Etablir :

$$\left|\sum_{n=(2N_0+1)^2}^{N} (-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\right| \leq 8(N_0+1).$$

Comme $(2N_0+1)^2 \leq N < (2N_0+3)^2$,

$$\left| \sum_{n=(2N_0+1)^2}^{N} (-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \right| \leq N+1-(2N_0+1)^2 \leq (2N_0+3)^2-(2N_0+1)^2 \leq 8(N_0+1).$$

(d) En déduire que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n}$ est une série convergente.

On applique le résultat de la question 10(b) en remarquant que les sommes partielles de $\sum(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}$ sont majorées en valeur absolue par $10(N_0+1)$ et $N_0+1 \leq \sqrt{N}$.

12. Dans cette question, θ est un nombre réel de l'intervalle $]0, 2\pi[$.

(a) Montrer que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $s_n = \sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ est bornée.

$$|s_n| = \left| \sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta} \right| \leq \frac{2}{|1-e^{i\theta}|}.$$

(b) Montrer que la série $\sum |c_n - c_{n+1}|$ avec $c_n = \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ est convergente.

Si $n+1=p^2$ pour un entier naturel p, alors $|c_n - c_{n+1}| = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{p^2-1} + \frac{1}{p^2}$. Sinon, $p^2 \leq n < n+1 < (p+1)^2$, alors $|c_n - c_{n+1}| = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Et les séries de terme général $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, $\frac{1}{p^2}$ et $\frac{1}{p^2-1}$ sont convergentes.

(c) En déduire que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n} e^{in\theta}$ est convergente.

On conclut avec la question 10(a) avec $b_n = c_n$ et $a_n = e^{in\theta}$.

13. Conclure.

On a montré que la série est convergente sur tout le cercle. Et elle n'y est évidemment pas absolument convergente.

2 Problème d'algèbre

Dans ce problème, on cherche à étudier des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par une formule de récurrence linéaire afin de trouver une formule simple donnant u_n en fonction de n.

Dans tout le problème, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ le corps des réels et $\mathbb{C}$ le corps des complexes. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. Si μ est une valeur propre d'une matrice M de taille $n \times n$, on note E_μ le sous-espace propre de $\mathbb{R}^n$ associé à la valeur propre μ, c'est-à-dire le noyau de l'application linéaire $M - \mu I_n$ où I_n est la matrice identité de taille $n \times n$. Ainsi

$$E_\mu = \{x \in R^n : Mx = \mu x\} = Ker(M - \mu I_n).$$

2.1 Suite récurrente d'ordre 2

On considère la suite réelle récurrente d'ordre 2 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_0 & = & 0, \\ u_1 & = & 1, \\ u_{n+2} & = & u_{n+1} + u_n. \end{array} \right. \tag{$\star$}$$

1. Calculer les termes u_2, u_3 et u_4.
   $u_2 = 1$, $u_3 = 2$ et $u_4 = 3$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note U_n le vecteur colonne de $\mathbb{R}^2$ tel que

   $$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}.$$

   Montrer qu'on peut écrire la relation $(\star)$ sous la forme

   $$U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U_{n+1} = M\ U_n,$$

   où M est l'élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par

   $$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On dira que M est la matrice de récurrence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+1} + u_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = M\ U_n.$$

3. Calculer les valeurs propres de la matrice M.
   Ce sont les racines de $-X(1-X) - 1 = X^2 - X - 1$. Avec $\Delta = 5$, on trouve $x_\pm = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
4. En déduire une base de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres de la matrice M.
   On résoud les systèmes

   $$Mu = x_+ u \Leftrightarrow u_2 = x_+ u_1 \text{ et } Mv = x_- v \Leftrightarrow v_2 = x_- v_1.$$

   d'où les vecteurs propres $u = (1, x_+)$ et $v = (1, x_-)$.
5. Identifier une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que

   $$D = P^{-1}MP. \tag{1}$$

   On a

   $$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_+ & x_- \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} x_+ & 0 \\ 0 & x_- \end{pmatrix}.$$

6. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire
$$M^n P = \begin{pmatrix} a^n & b^n \\ a^{n+1} & b^{n+1} \end{pmatrix}$$
où a et b sont des réels à déterminer.
En élevant la relation précédente à la puissance n, les matrices de passage se simplifient. D'où
$$M^n P = PD^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_+ & x_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_+^n & 0 \\ 0 & x_-^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_+^n & x_-^n \\ x_+^{n+1} & x_-^{n+1} \end{pmatrix}.$$

7. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la formule suivante :
$$u_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{\sqrt{5}\ 2^n}.$$

On calcule l'inverse de la matrice P
$$P^{-1} = \frac{-1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} x_- & -1 \\ -x_+ & 1 \end{pmatrix}.$$
D'où
$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_+^n & x_-^n \\ x_+^{n+1} & x_-^{n+1} \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}.$$
Et puisque $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, on a
$$u_n = x_+^n \times \frac{1}{\sqrt{5}} + x_-^n \times \frac{-1}{\sqrt{5}}.$$

8. En déduire un équivalent simple de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $n \to +\infty$.
Puisque $|x_+| > |x_-|$, on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(1+\sqrt{5})^n}{\sqrt{5}\ 2^n}$.

2.2 Suite récurrente d'ordre p

Dans cette partie, on considère une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par une récurrence d'ordre p de la forme :
$$v_{n+p} = \mu_0 v_n + \mu_1 v_{n+1} + \cdots + \mu_{p-1} v_{n+p-1}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$
où $(\mu_i)_{i=1\ldots p-1}$ est une famille de réels fixée avec $\mu_0 \neq 0$. De plus, on se donne une condition initiale pour les p premiers éléments de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sous la forme
$$v_0 = v^0, v_1 = v^1, \ldots, v_p = v^p, \tag{3}$$
où $(v^0, \ldots, v^p)$ est une autre famille de réels fixée.
Une telle suite possède également une matrice de récurrence $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$V_{n+1} = M\ V_n,$$
avec $V_n = (v_n, v_{n+1}, \ldots, v_{n+p-1})^t$ un vecteur colonne de $\mathbb{R}^p$.

9. Montrer que la matrice M est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \cdots & \mu_{p-2} & \mu_{p-1} \end{pmatrix}.$$

Tout comme dans la première partie, on trouve la forme attendue pour la matrice M.

10. Déterminer le polynôme caractéristique (noté χ_M) de la matrice M.
La matrice M est la matrice compagnon d'un polynôme. On le trouve en développant par rapport à la première colonne.

$$\begin{aligned} \chi_M(X) &= \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -X & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -X & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -X & 1 \\ \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \cdots & \mu_{p-2} & \mu_{p-1} - X \end{vmatrix} \\ &= -X \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -X & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -X & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -X & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \cdots & \mu_{p-2} & \mu_{p-1} - X \end{vmatrix} + (-1)^p \mu_0 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -X & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -X & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -X & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^p \mu_0 - X \times \chi_{M'}(X) \end{aligned}$$

où M' est une autre matrice de la même forme que M. Par récurrence, on trouve $\chi_M(X) = (-1)^p(\mu_0 + \mu_1 X + \cdots + \mu_{p-1}X^{p-1} - X^p)$.

11. Montrer qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et une matrice triangulaire supérieure $T \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$

$$T = \begin{pmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & t_{1,3} & \cdots & t_{1,p} \\ 0 & t_{2,2} & t_{2,3} & \cdots & t_{2,p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & t_{p-1,p-1} & t_{p-1,p} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & t_{p,p} \end{pmatrix},$$

où les $t_{i,j}$ sont des éléments de $\mathbb{C}$, telles que

$$T = P^{-1}MP. \tag{4}$$

Une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ peut se voir comme une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. $\mathbb{C}$ étant un corps algébriquement clos, toute matrice est trigonalisable d'où l'existence des matrices T et P.

12. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire

$$V_n = PT^n P^{-1} V_0.$$

En élevant T à la puissance n, les matrices de passage se simplifient, et on a la relation voulue.

2.3 Diagonalisation

On note $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ l'ensemble des valeurs propres de la matrice M définie par

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \cdots & \mu_{p-2} & \mu_{p-1} \end{pmatrix}.$$

où on rappelle que $(\mu_i)_{i=1\ldots p-1}$ est une famille de réels fixée avec $\mu_0 \neq 0$.

13. Montrer qu'il existe un vecteur propre associé à la valeur propre λ_1 qui soit colinéaire à un vecteur de la forme

$$(1, \lambda_1, \lambda_1^2, \ldots, \lambda_1^{p-1}).$$

On note v le vecteur précédent. Il suffit de calculer le produit matrice-vecteur Mv

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \cdots & \mu_{p-2} & \mu_{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_1 \\ \mu_1^2 \\ \vdots \\ \mu_1^{p-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_1^2 \\ \vdots \\ \mu_1^{p-1} \\ \mu_0 + \mu_1\mu_1 + \cdots \mu_{p-1}\mu_1^{p-1} \end{pmatrix}.$$

Et puisque μ_1 est racine de χ_M alors la dernière ligne vaut μ_1^p. Donc $Mv = \mu_1 v$. Ainsi v est un vecteur propre donc il existe bien un vecteur propre qui lui soit colinéaire...

14. Montrer que la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ suivante

$$\begin{pmatrix} -\lambda_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -\lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -\lambda_1 & 1 \\ \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \cdots & \mu_{p-2} & \mu_{p-1} - \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

est de rang supérieur ou égal à $p-1$.

Puisque la matrice est en forme d'escalier, on peut simplifier les lignes une à une. Le rang de la matrice est alors au moins égal à $p-1$.

15. En déduire que les sous-espaces propres de la matrice M sont tous de dimension 1, c'est-à-dire
$$\text{Pour tout } i \in \{1, \dots, p\}, \quad \dim(E_{\lambda_i}) = 1.$$

Par le théorème du rang et la question précédente, la dimension du noyau E_{λ_1} est inférieure à 1. Elle est évidemment supérieure à 1 puisque λ_1 est une valeur propre. Donc $\dim(E_{\lambda_1}) = 1$. Et idem pour toutes les autres valeurs propres.

Dans la suite de cette partie, on suppose que toutes les valeurs propres sont distinctes. Et on note D la matrice diagonale de la forme

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{p-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}.$$

16. Montrer qu'il existe une matrice de passage P de la forme

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \nu_1 & \nu_2 & \cdots & \nu_p \\ \nu_1^2 & \nu_2^2 & \cdots & \nu_p^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \nu_1^{p-1} & \nu_2^{p-1} & \cdots & \nu_p^{p-1} \end{pmatrix}$$

avec $(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_p)$ une famille de réels à déterminer telle que $D = P^{-1}MP$.

Puisque toutes les valeurs propres sont distinctes, alors on a bien égalité entre la multiplicité d'une valeur propre $(= 1)$ et la dimension du sous-espace propre associé $(= 1)$. La matrice est donc diagonalisable. Il suffit d'écrire la matrice de passage P dans le bon ordre pour obtenir la forme de la matrice diagonale désirée. D'après les questions précédentes, et puisque les espaces propres sont de dimension 1, les vecteurs propres ont tous la forme donnée à la question 13. Donc la matrice de passage P s'écrit

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_p \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_p^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_1^{p-1} & \lambda_2^{p-1} & \cdots & \lambda_p^{p-1} \end{pmatrix}$$

Et la famille $(\nu_i)_{i=1,\dots,p}$ est en fait la famille $(\lambda_i)_{i=1,\dots,p}$.

17. **Application :** Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_0 & = & 0, \\ a_1 & = & 1, \\ a_2 & = & 0, \\ a_{n+3} & = & a_{n+2} - a_{n+1} + a_n \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} b_0 & = & 0, \\ b_1 & = & 0, \\ b_2 & = & 1, \\ b_{n+3} & = & b_{n+2} - b_{n+1} + b_n \end{array} \right. \tag{5}$$

vérifient $a_n = \dfrac{i^n - (-i)^n}{2i}$ et $b_n = \dfrac{1-(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}}{2}$ où $\lfloor n/2 \rfloor$ désigne la partie entière du nombre $n/2$.
Les deux suites ont la même matrice de récurrence

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est donc $1 - X + X^2 - X^3$. Une racine évidente est $\lambda_3 = 1$. Puis $1 - X + X^2 - X^3 = (1-X)(1+X^2)$. Donc $\lambda_1 = i$ et $\lambda_2 = -i$. Les racines sont toutes différentes donc la matrice est diagonalisable. La matrice de passage est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ i & -i & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Son déterminant est $-4i$ et son inverse est

$$P^{-1} = \frac{1}{-4i} \begin{pmatrix} -i+1 & -(i+1) & -2i \\ -2 & 2 & 0 \\ 1+i & -(1-i) & -2i \end{pmatrix}^t = \frac{i}{4} \begin{pmatrix} -i+1 & -2 & 1+i \\ -(i+1) & 2 & -(1-i) \\ -2i & 0 & -2i \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1+i & -2i & -1+i \\ 1-i & 2i & -1-i \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ i & -i & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i^n & 0 & 0 \\ 0 & (-i)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1+i & -2i & -1+i \\ 1-i & 2i & -1-i \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ i & -i & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i^n & 0 & 0 \\ 0 & (-i)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2i \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ i & -i & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2i^{n+1} \\ -2(-i)^{n+1} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2i^{n+1} - 2(-i)^{n+1} \\ 2i^n + 2(-i)^n \\ 2i^{n+1} + 2(-i)^{n+1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Donc $a_n = \dfrac{-2i^{n+1} - 2(-i)^{n+1}}{4} = \dfrac{-2i(i^n - (-i)^n)}{4} = \dfrac{i^n - (-i)^n}{2i}$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} b_n \\ b_{n+1} \\ b_{n+2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ i & -i & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i^n & 0 & 0 \\ 0 & (-i)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1+i & -2i & -1+i \\ 1-i & 2i & -1-i \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ i & -i & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i^n & 0 & 0 \\ 0 & (-i)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1+i \\ -1-i \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ i & -i & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i^n + i^{n+1} \\ -(-i)^n + (-i)^{n+1} \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -i^n + i^{n+1} - (-i)^n + (-i)^{n+1} + 2 \\ -i^{n+1} + i^{n+2} - (-i)^{n+1} + (-i)^{n+2} + 2 \\ i^n - i^{n+1} + (-i)^n - (-i)^{n+1} + 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc $b_n = \dfrac{-i^n + i^{n+1} - (-i)^n + (-i)^{n+1} + 2}{4}$.
En particulier si $n = 2p$,

$$b_n = \frac{1}{4}\left((-1)^{p+1} + i(-1)^p + (-1)^{p+1} - i(-1)^p + 2\right) = \frac{1-(-1)^p}{2} = \frac{1-(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}}{2}.$$

Et si $n = 2p+1$,

$$b_n = \frac{1}{4}\left(i(-1)^{p+1} + (-1)^{p+1} - i(-1)^{p+1} + (-1)^{p+1} + 2\right) = \frac{1-(-1)^p}{2} = \frac{1-(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}}{2}.$$

AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

1. Soit (u_n) une suite décroissante de nombres réels strictement positifs telle que la série de terme général u_n converge. Déterminer $\underset{n\to\infty}{Lim}\, n u_n$

Posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

On a : $0 < (2n)u_{2n} = 2(u_{2n} + ... + u_{2n}) \leq 2 \sum_{k=n+1}^{2n} u_k = 2(S_{2n} - S_n)$, car la suite est décroissante.

Puisque la série de terme général u_n converge, $\underset{n\to\infty}{Lim}\, 2(S_{2n} - S_n) = 0$ et donc $\underset{n\to\infty}{Lim}(2n)u_{2n} = 0$

De même, $0 < (2n+1)u_{2n+1} \leq (2n+1)u_{2n} = (2n)u_{2n} + u_{2n} \to 0$. Donc les suites de rangs pairs et impairs extraites de la suite (nu_n) convergent et ont la même limite 0. On en déduit que $\underset{n\to\infty}{Lim}\, n u_n = 0$

2. Donner un exemple de suite (u_n) de réels strictement positifs telle que la série de terme général u_n converge, mais telle que la suite de terme général $n u_n$ ne tende pas vers zéro.

Il faut choisir une suite non monotone. Par exemple, la suite définie par :
$u_0 = 0,\ u_n = \frac{1}{n}$ si n est un carré parfait non nul et 0 ailleurs. La suite est positive, on a : $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} < +\infty$ et pourtant $p^2 u_{p^2} = 1 \to 1$. La suite (nu_n) admet une suite extraite qui converge vers 1, donc on ne peut avoir $\underset{n\to\infty}{Lim}\, n u_n = 0$

3. Soit σ une application injective de N^* (ensemble des entiers naturels non nuls) dans lui-même. Etudier la convergence de la série de terme général $\frac{\sigma(n)}{n^2}$.

Montrons que la suite $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma(k)}{k^2}$ ne vérifie pas le critère de Cauchy.

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sigma(k)}{k^2} \geq \frac{1}{(2n)^2} \sum_{k=n+1}^{2n} \sigma(k) \geq \frac{1}{4n^2}(1 + 2 + ... + n) = \frac{n(n+1)}{8n^2} \geq \frac{n^2}{8n^2} = \frac{1}{8}$$

Si la suite (S_n) était convergente, on devrait avoir $\underset{n\to\infty}{Lim}(S_{2n} - S_n) = 0$ ce qui contredit l'inégalité précédente. La série considérée est donc divergente.

Exercice n° 2

1. Montrer que pour tout *x* nombre réel, on a : $1+x \le e^x$
On applique la formule de Taylor à l'exponentielle, à l'ordre deux, entre 0 et *x*, pour obtenir :

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}e^{\theta x}, \text{ d'où } e^x-(1+x)=\frac{x^2}{2}e^{\theta x} \ge 0$$

2. Etudier la convergence de la suite de terme général :

$u_n = (1+k)(1+k^2)+...+(1+k^n)$, pour $n \in N^*$ et pour $0 \le k < 1$

On applique le résultat précédent avec $x = k^p$, il vient : $1 \le 1+k^p \le e^{(k^p)}$
Et par récurrence : $1 \le u_n = (1+k)....(1+k^n) \le e^{(k+k^2+...k^n)}$

Or $k+k^2+...=k^n = k\dfrac{1-k^n}{1-k} \le \dfrac{k}{1-k}$, car k est compris entre 0 et 1. Comme la fonction exponentielle est croissante, $e^{(k+k^2+...k^n)} \le e^{k/(1-k)}$ et on obtient : $1 \le u_n \le e^{k/(1-k)}$.

Par ailleurs la suite est croissante, en effet $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1+k^{n+1} \ge 1$.

En conclusion la suite est convergente car elle est majorée et croissante.

3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{1}{k\,Ln(k)}$ (cette question est indépendante des deux précédentes)

On considère la fonction $Ln|Ln\,x|$ qui est dérivable sur $R^{+*}-\{1\}$ et on applique le théorème des accroissements finis :

$$\forall\, p \ge 2,\ \exists \theta \in \left]0,1\right[,\ Ln(Ln(p+1))-Ln(Ln\,p)=\frac{1}{(p+\theta)Ln(p+\theta)}$$

La croissance de la fonction logarithmique implique : $Ln(Ln(p+1))-Ln(Ln\,p) \le \dfrac{1}{pLn(p)}$

En additionnant membre à membre les inégalités de 2 à *n*, on obtient :

$$Ln(Ln(n+1))-Ln(Ln\,2) \le \frac{1}{2\,Ln\,2}+....+\frac{1}{n\,Ln\,n}$$

Comme $\lim\limits_{n\to\infty} Ln(Ln(n+1)) = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{1}{k\,Ln(k)} = +\infty$

Exercice n° 3

1. Soient $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ n nombres réels et $A = \begin{pmatrix} 0 & ... & ... & 0 & a_0 \\ 1 & . & . & . & a_1 \\ 0 & . & . & . & . \\ ... & . & . & 0 & . \\ 0 & ... & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$ la matrice carrée d'ordre

n (elle présente des 1 sur la sous diagonale, les a_i sur la dernière colonne et partout ailleurs des zéros). Calculer le polynôme caractéristique de *A*.

En développant par rapport à la dernière colonne, on obtient

$Det\,(A - \lambda I) = (-\lambda)^{n-1}(a_{n-1} - \lambda) + \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{n-k+1} a_k Det\,(A_k)$, où A_k est une matrice par blocs

définie par : $A_k = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ avec $B = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & ... & 0 \\ \lambda & . & . & . \\ . & . & . & 0 \\ \lambda & ... & \lambda & -\lambda \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} \lambda & ... & ... & \lambda \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ \lambda & ... & ... & \lambda \end{pmatrix}$ et

$D = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & ... & \lambda \\ 0 & . & . & . \\ . & . & . & \lambda \\ 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On obtient $Det\,(A_k) = (-\lambda)^k$ et

$$Det\,(A - \lambda I) = (-\lambda)^{n-1}(a_{n-1} - \lambda) + \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{n-k+1} a_k\,(-\lambda)^k = (-1)^{n+1}(\lambda^{n+1} - \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k)$$

2. Trouver une matrice carrée A d'ordre 4 qui vérifie l'équation : $A^4 - 3A^3 + A^2 - I_4 = 0$

D'après la relation précédente :
$\lambda^4 - a_0 - a_1\,\lambda - a_2\,\lambda^2 - a_3\,\lambda^3 = 0 \Rightarrow a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = -1, a_3 = 3$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice n° 4

On rappelle qu'étant donné deux vecteurs x_1 et x_2 de l'espace vectoriel euclidien orienté R^3, il existe un unique vecteur *y* de R^3 qui vérifie :

$$Det(x_1, x_2, z) = y.z, \ \forall z \in R^3$$

Où *y.z* désigne le produit scalaire euclidien de ces deux vecteurs et *Det* le déterminant. Le vecteur *y* s'appelle le produit vectoriel de x_1 et x_2 et on note $y = x_1 \wedge x_2$.

1. Calculer dans une base orthonormée de R^3, les composantes de *y* en fonction de celles de x_1 et x_2.

Soient $x_1 = (x_{11}, x_{12}, x_{13})$ $x_2 = (x_{21}, x_{22}, x_{23})$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$

Pour $z = (1,0,0)$ on obtient $y_1 = x_{12}x_{23} - x_{22}x_{13}$
Pour $z = (0,1,0)$ on obtient $y_2 = x_{13}x_{21} - x_{23}x_{11}$
Pour $z = (0,0,1)$ on obtient $y_3 = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}$

2. On considère un vecteur unitaire w et l'endomorphisme *u* de R^3 défini par : $u(x) = x \wedge w$

- Vérifier que $(x \wedge w) \wedge w = (w.x)w - x$

On vérifie que les composantes des deux vecteurs de l'égalité du double produit vectoriel sont identiques. Si $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $w = (w_1, w_2, w_3)$, la première composante est $x_2 w_1 w_2 + x_3 w_1 w_2 + x_1(w_1^2 - 1)$ sachant que le vecteur *w* est unitaire. Il en est de même des deux autres composantes.

- Montrer qu'il existe un réel *k* tel que : $u^3 = ku$
- En déduire les valeurs propres réelles de *u* et les sous espaces propres associés.

On a : $u^2(x) = (x \wedge w) \wedge w = (w.x)w - x$ et $u^3(x) = -u(x)$ car $w \wedge w = 0$

Si *x* est un vecteur propre, associé à la valeur propre λ
$u^3(x) = \lambda^3 x = -\lambda x$ et $\lambda^3 + \lambda = 0$ et $\lambda = 0$

Le sous espace propre associé est défini par $x \wedge w = 0$, soit la droite vectorielle engendrée par *w*.

3. Pour tout réel α, on note φ_α l'application définie sur R^3 par : $\varphi_\alpha(x) = x + \alpha(x \wedge w)$

- Montrer que φ_α est une bijection de R^3

On a : $\varphi_\alpha = id + \alpha u$

Si cette application n'était pas inversible, il existerait un alpha non nul tel que :

$Det(id + \alpha u) = 0 = \alpha^2 \, Det(u + \frac{1}{\alpha} id)$ et donc $-1/\alpha$ serait un vecteur propre de *u*.

Contradiction avec le résultat précédent.

- Montrer qu'il existe un polynôme *P* de degré 3 tel que $P(\varphi_\alpha) = 0$

Dans $u^3 + u = 0$, on remplace *u* par $\frac{1}{\alpha}(\varphi_\alpha - Id)$

Si alpha est non nul, on trouve : $\varphi_\alpha^3 - 3\varphi_\alpha^2 + (3+\alpha^2)\varphi_\alpha - (1+\alpha^2)id = 0$ +

On peut choisir : $P(x) = x^3 - 3x^2 + (3+\alpha^2)x - (1+\alpha^2)$

- En déduire l'expression de l'application réciproque de φ_α en fonction de α et *u*.

On a : $\varphi_\alpha \, o(\varphi_\alpha^2 - 3\varphi_\alpha + (3+\alpha^2)id = (1+\alpha^2)id$

D'où, $\varphi_\alpha^{-1} = \frac{1}{1+\alpha^2}(\varphi_\alpha^2 - 3\varphi_\alpha + (3+\alpha^2)id) = id - \frac{\alpha}{1+\alpha^2}u + \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}u^2$

Exercice n° 5

Les deux questions sont indépendantes. R_+^* désigne l'ensemble des nombres réels strictement positifs et C^k les fonctions *k* fois continûment dérivables.

1. Soit $f \in C^2(R_+^*, R)$ telle qu'il existe $l = \underset{x\to 0}{Lim} f(x)$ et que dans un voisinage de zéro, $f''(x) \geq -\frac{p}{x^2}$, où *p* est une constante positive. Déterminer $\underset{x\to 0}{Lim}\ x f'(x)$

On va montrer que : $\underset{x\to 0}{Lim}\ x f'(x) = 0$

Par hypothèse, $\exists \eta > 0,\ \forall x \in]0,\eta[,\ \Rightarrow x^2 f''(x) \geq -p$

Pour $\alpha > 1$ et $x < \frac{\eta}{\alpha}$

$$f(\alpha x) = f(x) + (\alpha - 1)x f'(x) + \frac{(\alpha-1)^2}{2} x^2 f''(\sigma)$$

Et on en déduit, $x\,f'(x)=\dfrac{f(\alpha x)-f(x)}{\alpha-1}-\dfrac{(\alpha-1)}{2}x^2\ f''(\sigma)$, mais :

$x^2\ f''(\sigma)=\dfrac{x^2}{\sigma^2}\sigma^2\ f''(\sigma^2)\geq -p\dfrac{x^2}{\sigma^2}$ donc $-\dfrac{(\alpha-1)}{2}x^2\ f''(\sigma)\leq \dfrac{\alpha-1}{2}p\dfrac{x^2}{\sigma^2}\leq\dfrac{\alpha-1}{2}p$

Soit $\varepsilon>0$, on peut choisir $\alpha>1$ tel que $(\alpha-1)\,p<\varepsilon$, ainsi $\underset{x\to 0}{Lim}\dfrac{f(\alpha\,x)-f(x)}{\alpha-1}=0$, donc $\exists\eta_1<\eta,\ 0<x<\eta_1\Rightarrow\dfrac{f(\alpha\,x)-f(x)}{\alpha-1}<\dfrac{\varepsilon}{2}$

Et par suite, $0<x<\eta_1\Rightarrow x\,f'(x)<\varepsilon$

Fixons, $0<\alpha<1$, on a de même $x\,f'(x)=\dfrac{f(x)-f(\alpha\,x)}{1-\alpha}+\dfrac{1-\alpha}{2}x^2\ f''(\sigma)$ avec :

$\dfrac{1-\alpha}{2}x^2\ f''''(\sigma)\geq-\dfrac{1-\alpha}{2}p\dfrac{x^2}{\sigma^2}\geq-\dfrac{1-\alpha}{2\alpha^2}p$

On peut choisir α tel que $\dfrac{1-\alpha}{\alpha^2}p<\varepsilon$, comme ci-dessus on obtient $\eta_2<\eta$ tel que $0<x<\eta_2\ \Rightarrow x\,f'(x)>-\varepsilon$

On a donc $\forall\, x\in\,]0,Inf(\eta_1,\eta_2)[,\left|x\,f'(x)\right|<\varepsilon$ et $\underset{x\to 0}{Lim}\ x\,f'(x)=0$

2. Soit $f\in C^5(R,R)$ une fonction impaire qui vérifie :

(1) $f(0)=0$

(2) $\exists M>0,\forall\,x\in R,\left|f^{(5)}(x)\right|\leq M$

Montrer que pour tout réel *x*, on a : $\left|f(x)-\dfrac{x}{3}f'(x)\right|\leq\lambda\,M\,|x|$.

Déterminer la meilleure constante possible λ.

Soit $\varphi(x)=f(x)-\dfrac{x}{3}f'(x)$ et $\varphi(0)=0$ Par dérivation, on obtient :

$$\varphi'(x)=\frac{2}{3}f'(x)-\frac{x}{3}f''(x)\ \text{ et }\ \varphi'(0)=0$$

$$\varphi''(x)=\frac{1}{3}f''(x)-\frac{x}{3}f'''(x)\ \text{ et }\ \varphi''(0)=0$$

$$\varphi^{(3)}(x)=-\frac{x}{3}f^{(4)}(x)\ \text{ et }\ \varphi^{(3)}(0)=0$$

D'après le théorème des accroissements finis : $\left|f^{(5)}(x)\right| \leq M \Rightarrow \left|f^{(4)}(x) - f^{(4)}(0)\right| \leq M|x|$,

d'où $\forall x \in R$, $\left|\varphi''(x)\right| \leq M \dfrac{x^3}{3}$

Par application successive des accroissements finis,

$$\left|\varphi''(x) - \varphi''(0)\right| = \left|\varphi''(x)\right| \leq M \frac{|x|^3}{9},\ \left|\varphi'(x) - \varphi'(0)\right| = \left|\varphi'(x)\right| \leq M \frac{x^4}{36} \text{ et } \left|\varphi\ (x)\right| \leq M \frac{|x|^5}{180}$$

On applique à $f(x) = M \dfrac{x^5}{120}$ et $f^{(5)}(x) = M$.

On obtient : $\varphi(x) = M \dfrac{x^5}{120} - \dfrac{x^5}{72} M = \dfrac{x^5}{180} M$

La meilleure constante possible est $\lambda = 1/180$.

Exercice n° 6

Soient $X = (X_1,...,X_n)$ et $Y = (Y_1,...,Y_n)$ deux suites indépendantes de variables de Bernoulli de même paramètre λ, où $0 < \lambda \leq 1/2$. On a :

$$\lambda = P(X_i = 1) = P(Y_i = 1) = 1 - P(X_i = 0) = 1 - P(Y_i = 0).$$

On note L_n la longueur de la plus grande suite *Z* commune à *X* et *Y*.

L'ordre des valeurs dans une suite ne peut pas être changé. Il est possible d'introduire des cases vides entre les valeurs d'une suite pour obtenir la plus grande suite commune.

Par exemple, pour *n*=9, si *X*=(0 0 0 1 0 0 1 0 0) et *Y*= (0 0 1 0 0 0 0 1 0), on peut noter :

X=	0	0	0	1	0	0			1	0	0
Y=	0	0		1	0	0	0	0	1	0	
Z=	0	0		1	0	0			1	0	

Et $L_n = 7$.

1. Pour *n*=2, calculer l'espérance de L_2 en fonction de λ .

L_2 peut prendre 3 valeurs : 0, 1 ou 2 et on a au total 16 cas (2 pour la valeur zéro, 10 pour la valeur 1 et 4 pour la valeur 2).

$$E(L_2) = 0 \times 2\lambda^2(1-\lambda)^2 + 1 \times \left[1 - 2\lambda^2(1-\lambda)^2 - (\lambda^2 + (1-\lambda\ )^2)^2\right] + 2 \times (\lambda^2 + (1-\lambda)^2)^2$$

$$E(L_2) = 1 + \lambda^4 + (1-\lambda)^4$$

2. Pour quelle valeur de λ, l'espérance de L_2 est-elle minimale ?

Soit $f(\lambda) = 1 + \lambda^4 + (1-\lambda)^4$

La dérivée s'annule pour $\lambda = 1/2$

Et on a un minimum pour cette valeur.

3. Quelle est la probabilité que $L_n = n$, sachant que la suite X est fixée avec uniquement trois 1 et que Y a aussi uniquement trois 1 (n>3)?

Pour obtenir $L_n = n$ il faut que les deux suites soient identiques (elles ont la même longueur).

$$\Pr ob(L_n = n) = \frac{Nombre\ de\ cas\ favorables}{Nombre\ total\ de\ cas} = \frac{1}{C_n^3}$$

AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE CALCUL NUMÉRIQUE

Exercice I

1. En appliquant la formule de Taylor avec reste Lagrange on trouve

$$f(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{3}{3! \cdot 8}(1+\theta x)^{-5/2}x^3,$$

pour un certain θ dans $]0,1[$. Ainsi, $P_2(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$ et, pour x dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, nous avons

$$|f(x) - P_2(x)| \leq \frac{3|x|^3}{48(1/2)^{5/2}} = \frac{\sqrt{2}|x|^3}{4} \leq \frac{|x|^3}{2}.$$

2. Soit $N_x = [1/\sqrt{x}]$ appartenant à $\mathbb{N}$. En utilisant un développement de Taylor de f autour de 0, avec reste Lagrange, on obtient

$$f(kx) = f'(0)kx + \frac{1}{2}f''(\theta kx)k^2x^2, \text{ pour } \theta \in]0,1[.$$

En remplaçant dans la somme :

$$\begin{aligned} S(x) &:= \sum_{k=1}^{N_x} f(kx) = \sum_{k=1}^{N_x}(f'(0)kx + \frac{1}{2}f''(\theta kx)k^2x^2) \\ &= f'(0)x\frac{N_x(N_x+1)}{2} + \eta(x), \end{aligned}$$

où $\eta(x) = \frac{x^2}{2}\sum_{k=1}^{N_x} k^2 f''(\theta kx)$. Puisque f'' est bornée dans un voisinage de 0 et comme

$$\sum_{k=1}^{N_x} k^2 = N_x(N_x+1)(2N_x+1)/6,$$

nous avons $\eta(x) \to 0$ quand x décroit vers 0.

Par ailleurs, $xN_x(N_x+1)$ est compris entre $1-x$ et $1+x$ et tend vers 1, quand x décroit vers 0. Au final,

$$S(x) \to \frac{f'(0)}{2}, \text{ quand } x \to 0+.$$

3. En posant $y = a/\sqrt{x}$, nous avons le développement de Taylor de f en 0 : $f(y) = 1 - y^2/2(1+\varepsilon(y))$, où $\varepsilon(y) \to 0$ quand $y \to 0$. De plus, $\ln(1 - y^2/2(1+\varepsilon(y))) = -y^2/2(1+\varepsilon'(y))$ avec $\varepsilon'(y) \to 0$ quand $y \to 0$. Nous en déduisons,

$$\begin{aligned}\left(f\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)\right)^x &= \exp\left(x \ln f\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)\right) \\ &= \exp\left(x \ln(1 - \frac{1}{2}\frac{a^2}{x}(1+\varepsilon(\frac{a}{\sqrt{x}}))\right) \\ &= \exp(-\frac{a^2}{2}(1+\varepsilon'(\frac{1}{\sqrt{x}})).\end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\lim_{x\to\infty}\left(f\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)\right)^x = \exp(-\frac{a^2}{2}).$$

Exercice II

1. On peut diagonaliser A et on obtient $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, où

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Soit B dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et mettons $C = P^{-1} \cdot B \cdot P$. Alors, l'équation de départ $B^2 = A$ est équivalente à $C^2 = D$. De plus, $tr(C) = tr(B) = 0$. Ces équations donnent

$$C = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $a^2 + bc = 1$. Pour finir, il faut transformer via $B = P \cdot C \cdot P^{-1}$, ce qui donne

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4a - 3b + c & 9a - 9b + 2c & 5a - 6b + c \\ -a + b & -2a + 3b & -a + 2b \\ -a - c & -3a - 2c & -2a - c \end{pmatrix}, \, a, b, c \in \mathbb{R}^3, \, a^2 + bc = 1 \right\}.$$

Exercice III

1. Si $b = c = 0$ la matrice est diagonale.

Si $b = 0$ et $c \neq 0$, la matrice est triangulaire inférieure, donc elle admet a comme valeur propre de multiplicité 3. L'espace propre associé à a est $\{(0, 0, X)^\top, \, X \in \mathbb{C}\}$.

De manière similaire, si $b \neq 0$ et $c = 0$, a est valeur propre de multiplicité 3 et l'espace propre associé est $\{(X, 0, 0)^\top, \, X \in \mathbb{C}\}$.

Si $b \neq 0$ et $c \neq 0$, on obtient, soit par calcul de déterminants, soit par les équations de la question suivante, que les valeurs propres sont $\lambda_1 = a$ et $\lambda_{2,3} = a \pm \sqrt{2bc}$. Les sous-espaces propres sont de rang 1, associés aux vecteurs propres $v_1 = (b, 0, -c)^\top$, $v_2 = (b, \sqrt{2bc}, c)^\top$ et $v_3 = (b, -\sqrt{2bc}, c)^\top$, respectivement.

2. Soit X un vecteur de taille n à éléments complexes et $\lambda \in \mathbb{C}$. L'équation $AX = \lambda X$ donne les équations

$$\begin{aligned} aX_1 + bX_2 &= \lambda X_1 \\ cX_1 + aX_2 + bX_3 &= \lambda X_2 \\ &\cdots \\ cX_{n-1} + aX_n &= \lambda X_n \end{aligned}$$

qui peuvent s'écrire aussi sous forme récurrente

$$bX_{k+1} + (a - \lambda)X_k + cX_{k-1} = 0,$$

en posant $X_0 = X_{n+1} = 0$. Nous allons résoudre l'équation caractéristique $br^2 + (a - \lambda)r + c = 0$ de cette suite récurrente. Le déterminant de cette équation est $\Delta = (a - \lambda)^2 - 4bc$. Si ce déterminant s'annule l'équation admet une solution double $r_0 = \frac{\lambda - a}{2b}$ qui est différente de 0 (car $c \neq 0$). Il existe donc des nombres complexes α et β tels que

$$X_k = \alpha r_0^k + \beta k r_0^{k-1}.$$

Comme $X_0 = X_{n+1} = 0$, on en déduit $\alpha = \beta = 0$, donc $X = 0$. Ceci est exclu, donc le déterminant Δ ne peut s'annuler.

Nous avons donc $\Delta \neq 0$ et l'équation admet deux solutions distinctes r_1 et r_2, ce qui donne $X_k = \alpha_1 r_1^k + \alpha_2 r_2^k$. En tenant compte de $X_0 = X_{n+1} = 0$, on trouve $r_1^{n+1} = r_2^{n+1}$. Il existe donc p entre 1 et n tel que $r_2 = r_1 \exp(\frac{2ip\pi}{n+1})$. Ceci donne, pour p de 1 à n,

$$r_1 = \sqrt{\frac{c}{b}} \exp\left(-\frac{ip\pi}{n+1}\right), \ r_2 = \sqrt{\frac{c}{b}} \exp\left(\frac{ip\pi}{n+1}\right) \ \text{ et } \lambda = a + \sqrt{2bc} \cos\left(\frac{p\pi}{n+1}\right).$$

Comme nous avons ici n valeurs propres 2 à 2 distinctes, la matrice est diagonalisable. Le vecteur propre associé à λ est

$$v = \left((\frac{c}{b})^{1/2} \sin\left(\frac{p\pi}{n+1}\right), ..., (\frac{c}{b})^{n/2} \sin\left(\frac{np\pi}{n+1}\right) \right)^\top.$$

En effet, les vecteurs trouvés à la première question sont proportionnels à v, pour $n = 3$.

Exercice IV

1. Nous avons

$$I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{10+x}\,dx = \ln\left(\frac{11}{10}\right).$$

De plus,

$$I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x}{10+x} \cdot x^n\,dx = \int_0^1 x^n dx - 10\int_0^1 \frac{x^n}{10+x}\,dx = \frac{1}{n+1} - 10 \cdot I_n.$$

2. Nous avons $\epsilon_n = 10\epsilon_{n-1}$. Donc $\epsilon_{10} = \epsilon_0 \cdot 10^{10} = 5 \cdot 10^5$. Par contre, $\epsilon_{10} = \epsilon_{20} \cdot 10^{-10}$. Il est donc préférable de calculer d'abord une approximation numérique de I_{20} car l'erreur numérique ne se propage pas quand n décroit, alors qu'elle augmente de manière exponentielle quand n croit.

3. Nous avons

$$I_n - I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n - x^{n+1}}{10+x}\,dx,$$

donc cette quantité est positive et, de plus,

$$I_n - I_{n+1} \leq \frac{1}{10}\left(\int_0^1 x^n\,dx - \int_0^1 x^{n+1}\,dx\right) = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{10(n+1)(n+2)}.$$

En utilisant la relation de récurrence donnée précédemment, nous en déduisons que

$$I_n - I_{n+1} = \frac{1}{10(n+1)} - \frac{1}{10} \cdot I_{n+1} - I_{n+1} \geq 0,$$

ce qui implique que

$$I_n \geq I_{n+1} \geq \frac{1}{11(n+1)}.$$

Par ailleurs,

$$I_n \leq I_{n+1} + \frac{1}{10(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - 10 \cdot I_n + \frac{1}{10(n+1)(n+2)},$$

ce qui donne l'autre inégalité

$$I_n \leq \frac{1}{11(n+1)} + \frac{1}{110(n+1)(n+2)}.$$